

## Methoden

Joachim Deutscher\* und Günter Roppenecker

# Robuste asymptotische Störkompensation mittels beobachterbasierter Störgrößenaufschaltungen

Robust asymptotic disturbance rejection using observer-based disturbance feedforward

**Zusammenfassung:** In diesem Beitrag wird ein neues Verfahren zum Entwurf von Störgrößenaufschaltungen mit Störbeobachtern für Strecken mit unbekanntem Störeintriffsort vorgestellt. Die resultierenden Regler sichern die Robustheit der asymptotischen Störkompensation, womit auch bei Auftreten von nicht destabilisierender Modellunsicherheit die stationär vollständige Ausregelung von Störungen gewährleistet ist. Der neue Reglerentwurf ist dual zur Anwendung des internen Modellprinzips mittels des Ansatzes von Davison. Im Gegensatz zu letzterem ermöglicht die neue Entwurfsmethodik jedoch eine sehr einfache und vollständige Vermeidung von Regler-Windup durch Einspeisung des begrenzten Stellsignals in den Störbeobachter. Ein einfaches Beispiel verdeutlicht die Vorteile des neuen Entwurfsverfahrens.

**Schlüsselwörter:** Lineare Systeme, Störgrößenaufschaltung, Störbeobachter, internes Modellprinzip, Dualität, Stellsignalbegrenzung, Beobachertechnik.

**Abstract:** In this contribution a new method for the design of disturbance feedforward controllers with disturbance observers is presented for systems, where the disturbance input location is unknown. The resulting controller achieves an asymptotic rejection of the disturbances in spite of plant parameter variations and of changing disturbance input locations and is therefore robust. It is shown that the new controller design method is dual to Davison's approach for the application of the internal model principle. However, different from the latter one the new design procedure allows a simple and complete prevention of controller windup by driving the disturbance observer with the saturated input. A simple example demonstrates the advantages of the new design method.

**Keywords:** Linear systems, disturbance feedforward, disturbance observer, internal model principle, duality, input saturation, observer technique.

DOI 10.1515/auto-2014-1104

Eingang 26. März 2014; angenommen 10. Juni 2014

## 1 Einleitung

Eine grundlegende Forderung an Regelungen ist die robuste und stationär vollständige Ausregelung von nicht messbaren Dauerstörungen. Der zugehörige Reglerentwurf lässt sich unter Verwendung der Zustandsraummethodik systematisch durchführen, wenn sich die Störungen durch *Störmodelle* im Zustandsraum beschreiben lassen (für eine Übersicht siehe z. B. [18]). In diesem Fall gibt es zwei grundsätzliche Vorgehensweisen für die Reglersynthese. Der erste Ansatz basiert auf dem Entwurf einer *Störgrößenaufschaltung* zur asymptotischen Störkompensation, die sich mittels eines *Störbeobachters* implementieren lässt (siehe z. B. [7, 12]) und somit zu einer *beobachterbasierten Störgrößenaufschaltung* führt. Der zweite Ansatz beruht auf der Anwendung des *internen Modellprinzips* (siehe [6, 13]). Dabei muss jede einzelne der als messbar angenommenen Regelgrößen ein Signalmodell der auf sie einwirkenden Störung anregen. Beim speziellen Ansatz von *Davison* (siehe [2, 7]) wird dieser Entwurf dahingehend vereinfacht, dass je Regelgröße dasselbe Störmodell im Regler realisiert wird. Damit sind die berücksichtigten Signalformen der Störung für jede einzelne Regelgröße gleich. Der besondere Vorteil dieser Methode ist, dass die asymptotische Störkompensation dann zusätzlich *robust* ist, d. h. eine stationär vollständige Ausregelung der Störung auch bei Auftreten von nicht destabilisierenden Modellunsicherheiten erzielt wird. Im Vergleich dazu besitzt die Störgrößenaufschaltung im Mehrgrößenfall nicht diese Robustheitseigenschaft. Ein Nachteil der Anwendung des internen Modellprinzips besteht darin, dass im resultierenden Reglerübertragungsverhalten die

\*Korrespondenzautor: Joachim Deutscher, Universität Erlangen-Nürnberg, E-Mail: joachim.deutscher@fau.de

Günter Roppenecker: Universität Erlangen-Nürnberg

Störmodelleigenwerte, welche typischerweise auf der Imaginärachse liegen, als Pole auftreten. Damit können Stellensignalbegrenzungen zu einem *Regler-Windup* führen (siehe [9, 10]), da in diesem Fall nur die Dynamik des dann instabilen offenen Regelkreises wirksam ist. Erst durch eine zusätzliche Stabilisierung des Reglers kann dieses Problem beseitigt werden. Bei Störgrößenaufschaltungen mit Störbeobachter tritt im Prinzip die gleiche Problematik auf. Sie lässt sich jedoch durch Einspeisung der begrenzten Stellensignale in den Störbeobachter vollständig beseitigen, was i. Allg. als *Beobachertechnik* bezeichnet wird (siehe [8]). Darüber hinaus werden im Begrenzungsfall weiterhin die Reglerzustände wie im unbegrenzten Fall aufgebaut, was einer Verschlechterung der Regelungsdynamik durch begrenzte Stellensignale entgegenwirkt.

In diesem Beitrag wird gezeigt, dass es eine alternative Möglichkeit zum Entwurf von beobachterbasierten Störgrößenaufschaltungen gibt, welche die Vorteile der klassischen beobachterbasierten Störgrößenaufschaltung mit der Robustheitseigenschaft beim Reglerentwurf mittels des internen Modellprinzips kombiniert. Dies wird durch eine *duale Formulierung* des Ansatzes von Davison erreicht, der auf eine Störgrößenaufschaltung mit Störbeobachter führt. Da der resultierende Regler das interne Modellprinzip erfüllt, bewirkt er eine robuste asymptotische Störkompensation. Darüber hinaus lässt sich der Regler-Windup durch die Beobachertechnik vollständig vermeiden, weil der Störbeobachter neben dem Streckenmodell auch die Störmodelle und damit die gesamte Reglerdynamik enthält.

In [9, 10] wird zur Regler-Windup-Vermeidung bei Anwendung des Davisonansatzes eine alternative Vorgehensweise vorgeschlagen. Sie basiert auf der Modifikation der Anregung des Störmodells im Regler und einer anschließenden Transformation der Regelung auf ein *Dreieckssystem*. Dies ermöglicht ebenfalls die Beseitigung des Regler-Windups durch die Beobachertechnik. Im Vergleich zum hier vorgestellten Verfahren muss dabei allerdings zusätzlich eine Sylvestergleichung gelöst werden und es ist eine Modifikation des ursprünglichen Entwurfs nötig, der zudem nicht so geradlinig wie beim hiesigen Ansatz durchführbar ist.

Zur Herleitung des neuen Reglerentwurfs wird nach einer Problemformulierung im nächsten Abschnitt die Robustheit der klassischen beobachterbasierten Störgrößenaufschaltung für Eingrößensysteme in Abschnitt 3 analysiert. Diese Untersuchungen zeigen, dass der zugehörige Regler nicht nur die asymptotische, sondern zusätzlich auch die robuste und damit vom Störeingriffsort unabhängige Störkompensation sicherstellt. Ausgehend von diesem Ergebnis wird in Abschnitt 4 ein neuer Ansatz zum

Entwurf von Störgrößenaufschaltungen mit Störbeobachter ohne Kenntnis des tatsächlichen Störeingriffsorts angegeben. Es wird gezeigt, dass dieser Reglerentwurf dual zum Entwurfsverfahren von Davison ist. Diese Dualität wird in Abschnitt 5 genutzt, um die für Eingrößensysteme erzielten Ergebnisse auf den Mehrgrößenfall zu verallgemeinern. Zur Veranschaulichung des neuen Reglerentwurfs dient eine einfache Strecke mit Stellensignalbegrenzung.

## 2 Problemstellung

Ausgangspunkt der Betrachtungen sind Eingrößensysteme in der Zustandsbeschreibung

$$\dot{x} = Ax + bu + gd, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$y = c^T x \quad (2)$$

mit dem Eingang  $u(t) \in \mathbb{R}$  und dem messbaren Ausgang  $y(t) \in \mathbb{R}$ , der mit der Regelgröße übereinstimmt. Von der Strecke (1)–(2) wird die Steuerbarkeit von  $(A, b)$  und die Beobachtbarkeit von  $(c^T, A)$  vorausgesetzt. Darüber hinaus sei die nicht messbare Störung  $d(t) \in \mathbb{R}$  in (1) durch das *Störmodell*

$$\dot{v} = Sv, \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^{n_v} \quad (3)$$

$$d = p^T v \quad (4)$$

charakterisierbar. Um Redundanz bei dieser Signalbeschreibung zu vermeiden, wird  $(p^T, S)$  als beobachtbar angenommen. Für typische Störsignalverläufe, wie z. B. sprungförmige oder sinusförmige Störungen  $d$ , besitzt  $S$  in (3) nur Eigenwerte auf der Imaginärachse, wovon im Weiteren stets ausgegangen wird.

Die Aufgabenstellung besteht darin, einen stabilisierenden Ausgangsregler zu entwerfen, der *robuste asymptotische Störkompensation* sicherstellt. Dies bedeutet, dass für die zugehörige Regelung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad (5)$$

gilt und zwar  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n, \forall v(0) \in \mathbb{R}^{n_v}$ , für alle Anfangszustände des zu entwerfenden Reglers sowie für beliebige Störeingriffsorte und sonstige Modellunsicherheiten, die zu keinem instabilen Regelungsverhalten führen. Im Hinblick auf eine möglichst einfache Vermeidung des *Regler-Windups* soll dabei die Störkompensation über eine *beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung* erfolgen. Im Gegensatz zum klassischen Entwurf einer Störgrößenaufschaltung (siehe z. B. [12]) sei hier jedoch der Störeingangsvektor  $g$  in (1) und damit der Eingriffsort der Störung  $d$  in das System nicht bekannt.

### 3 Robustheitsuntersuchung der klassischen beobachterbasierten Störgrößenaufschaltung

Zur Hinführung auf die Lösung des im letzten Abschnitt formulierten Problems wird zunächst die Kenntnis von  $g$  angenommen. In diesem Fall lässt sich zur asymptotischen Störkompensation eine Zustandsrückführung mit einer Aufschaltung der Störmodellzustände gemäß

$$u = -k_x^T(x - \Pi v) + \gamma^T v \quad (6)$$

entwerfen, die der Einfachheit halber im Weiteren insgesamt als *klassische Störgrößenaufschaltung* bezeichnet wird. In (6) ist  $(\Pi, \gamma^T)$  Lösung der „regulator equations“

$$\Pi S - A\Pi = g p^T + b \gamma^T \quad (7)$$

$$c^T \Pi = 0^T \quad (8)$$

(siehe z. B. [12, Th. 1.3.1]), die unter der notwendigen und hinreichenden Bedingung

$$\det \begin{bmatrix} A - sI & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in \sigma(S) \quad (9)$$

existiert und eindeutig ist (siehe [12, Coll. A.1.2]). Darin bezeichnet  $\sigma(S)$  das *Spektrum* von  $S$ , d. h. die Menge aller Eigenwerte von  $S$ . Der noch zu bestimmende Rückführvektor  $k_x^T$  in (6) wird so gewählt, dass  $A - b k_x^T$  eine Hurwitz-Matrix darstellt.

Da die Zustandsgrößen in (6) i. Allg. nicht messbar sind, muss anschließend ein *Störbeobachter*

$$\dot{\hat{v}} = S\hat{v} + l_v(y - c^T \hat{x}) \quad (10)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + g p^T \hat{v} + l_x(y - c^T \hat{x}) \quad (11)$$

mit  $\hat{v}(0) = \hat{v}_0 \in \mathbb{R}^{n_v}$  und  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  entworfen werden. Dessen Eigenwerte lassen sich durch  $l_v$  und  $l_x$  genau dann beliebig vorgeben, wenn

$$(p^T, S) \quad \text{und} \quad (c^T, A) \quad \text{beobachtbar} \quad (12)$$

sowie

$$\det \begin{bmatrix} A - sI & g \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in \sigma(S) \quad (13)$$

gelten (siehe [14]). Damit ergibt sich bei Verwendung der mittels (10)–(11) rekonstruierten Zustandsgrößen in (6) eine *klassische beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung*

$$\dot{\hat{v}} = S\hat{v} + l_v(y - c^T \hat{x}) \quad (14)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + g p^T \hat{v} + l_x(y - c^T \hat{x}) \quad (15)$$

$$u = -k_x^T(\hat{x} - \Pi \hat{v}) + \gamma^T \hat{v}. \quad (16)$$

Man könnte nun erwarten, dass der anhand des nominalen Streckenmodells für asymptotische Störkompensation entworfene Regler (14)–(16) diese Eigenschaft nicht mehr sicherstellt, wenn sich der Störeingriffsort oder Streckenparameter ändern. Interessanterweise ist diese naheliegende Vermutung falsch. Um dies zu erkennen, führt man für den Regler (14)–(16) den neuen Zustand

$$\hat{e}_x = \hat{x} - \Pi \hat{v} \quad (17)$$

ein. Für (14) gilt mit (17)

$$\dot{\hat{v}} = S\hat{v} - l_v c^T \hat{e}_x + l_v y - l_v c^T \Pi \hat{v}. \quad (18)$$

Als Zustandsdifferentialgleichung für  $\hat{e}_x$  erhält man nach Einsetzen von (16) in (15)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_x &= \dot{\hat{x}} - \Pi \dot{\hat{v}} = (A - b k_x^T - \tilde{l}_x c^T) \hat{e}_x + \tilde{l}_x y \\ &\quad + (g p^T + b \gamma^T - \Pi S + b k_x^T \Pi + (A - b k_x^T - \tilde{l}_x c^T) \Pi) \hat{v} \end{aligned} \quad (19)$$

mit  $\tilde{l}_x = l_x - \Pi l_v$ . Berücksichtigt man in (18)–(19) die „regulator equations“ (7)–(8), so ergibt sich mit (16) die Zustandsbeschreibung

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{v}} \\ \dot{\hat{e}}_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S & -l_v c^T \\ 0 & A - b k_x^T - \tilde{l}_x c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{e}_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_v \\ \tilde{l}_x \end{bmatrix} y \\ u &= \gamma^T \hat{v} - k_x^T \hat{e}_x \end{aligned} \quad (20)$$

von (14)–(16) als *dynamische Ausgangsrückführung*. Aufgrund der oberen Blockdreiecksstruktur der Dynamikmatrix in (20) besitzt der Regler (20)–(21) die Eigenwerte des Störmodells (3). Wenn sie nicht durch invariante Nullstellen des Reglers oder der Strecke kompensiert werden, sind diese Eigenwerte auch Pole im Übertragungsverhalten des offenen Kreises. Dann regt die Regelgröße  $y$  ein Modell der Störung an, womit das *interne Modellprinzip* erfüllt ist (siehe z. B. [13, Satz 7.2]). Folglich stellt der Regler (14)–(16) die asymptotische Störkompensation für alle Störungen der angenommenen Form, unabhängig von ihrem Eingriffsort sicher und gewährleistet dies auch bei Parameteränderungen der Strecke, solange dabei die Stabilität der Regelung erhalten bleibt. Der nächste Satz gibt die Bedingungen an, unter denen dies für SISO-Systeme gilt.

**Satz 1. (Robustheit der klassischen beobachterbasierten Störgrößenaufschaltung (SISO))** *Es sei  $(\Pi, \gamma^T)$  in (6) eine Lösung der „regulator equations“ (7)–(8), es gelte (12)–(13) und die Regelung bestehend aus der Eingrößenstrecke (1)–(2) sowie dem Regler (14)–(16) sei für den Nominalfall asymptotisch stabil entworfen. Dann bewirkt dieser als Störgrößenaufschaltung mit Störbeobachter voller Ordnung entworfene Regler die robuste asymptotische Kompensation der Störungen (3)–(4) unabhängig von ihrem Eingriffsort.*

**Beweis:** Den Beweis findet man im Anhang.  $\square$

Zu diesem Satz ist noch anzumerken, dass im Fall eines geänderten Störeingriffs bei sonst nominellen Streckenparametern auch die Regelungseigenwerte gegenüber dem Nominalfall nicht verändert werden, weil dann nur eine andere externe Anregung auf den ansonsten unveränderten Regelkreis einwirkt. Dies bedeutet, dass es beim Entwurf der Störgrößenaufschaltung und des Störbeobachters voller Ordnung im Eingrößenfall nicht auf den Störeingriffsort ankommt. Folglich muss sich eine beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung auch ohne Kenntnis des Störeingangsvektors  $g$  entwerfen lassen, was im nächsten Abschnitt gezeigt wird und zu einer Lösung der im vorherigen Abschnitt formulierten Problemstellung führt.

## 4 Verallgemeinerte robuste beobachterbasierte Störgrößenaufschaltungen

### 4.1 Entwurf

Um den Entwurf der beobachterbasierten Störgrößenaufschaltung unabhängig vom Störeingriffsort und damit von  $g$  durchführen zu können, wird (1) mit der Null-Ergänzung  $g_f q^T v - g_f q^T v$  versehen, so dass die Strecke (1)–(2) in der Form

$$\dot{v} = Sv \quad (22)$$

$$\dot{x} = Ax + bu + g_f q^T v + (gp^T - g_f q^T)v \quad (23)$$

$$y = c^T x \quad (24)$$

dargestellt werden kann. Darin sind  $g_f \in \mathbb{R}^n$  und  $q \in \mathbb{R}^{n_v}$  noch geeignete Vektoren. Nach deren Wahl besitzt die Strecke einen bekannten Störeingriff  $g_f q^T v$  mit der durch (22) festgelegten Signalform. Somit lässt sich mit der Vorgehensweise des letzten Abschnitts eine beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung für diese Störung entwerfen. Weil der tatsächliche Störeingangsvektor  $g$  nicht bekannt ist, stellt  $(gp^T - g_f q^T)v$  einen unbekannteren weiteren Störeingriff mit der gleichen Störsignalform dar. Diese Störung wird ebenfalls asymptotisch ausgeglichen, da die entworfene beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung die robuste asymptotische Störkompensation für alle Störungen mit der durch (22) charakterisierten Signalform unabhängig vom Eingriffsort gewährleistet (siehe Satz 1).

Wählt man  $q^T = p^T$  (siehe (4)) dann lauten die zugehörigen „regulator equations“ für den Entwurf einer Störgrößenaufschaltung

$$PII - A\Pi = g_f p^T + b\gamma^T \quad (25)$$

$$c^T \Pi = 0^T \quad (26)$$

(siehe (7)–(8)). Der Freiheitsgrad in der Wahl von  $g_f$  kann genutzt werden, um die Lösung dieser „regulator equations“ zu vereinfachen. So lässt sich für  $g_f = b$  unmittelbar die Lösung  $\Pi = 0$  und  $\gamma^T = -p^T$  aus (25)–(26) ablesen. Das für die asymptotische Störkompensation sorgende Stellgesetz lautet dann entsprechend zu (6)

$$u = -k_x^T x - p^T v. \quad (27)$$

Der zugehörige Störbeobachter und das implementierte Stellgesetz führen auf die *verallgemeinerte beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung*

$$\dot{\hat{v}} = S\hat{v} + l_v(y - c^T \hat{x}) \quad (28)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + bp^T \hat{v} + l_x(y - c^T \hat{x}) \quad (29)$$

$$u = -k_x^T \hat{x} - p^T \hat{v} \quad (30)$$

mit  $\hat{v}(0) = \hat{v}_0 \in \mathbb{R}^{n_v}$  und  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Damit sich die Eigenwerte des Störbeobachters beliebig durch Wahl von  $l_v$  und  $l_x$  vorgeben lassen, muss wie zuvor die Gültigkeit von (12) und der aus (13) sinngemäß folgenden Bedingung

$$\det \begin{bmatrix} A - sI & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in \sigma(S) \quad (31)$$

gefordert werden. Darin macht (31) deutlich, dass wegen (9) die Lösung  $(\Pi, \gamma^T) = (0, -p^T)$  der „regulator equations“ (25)–(26) eindeutig ist.

### 4.2 Separationsprinzip

Für den Nachweis des Separationsprinzips ist es notwendig, die Differentialgleichung der Beobachtungsfehler  $e_v = v - \hat{v}$  und  $e_x = x - \hat{x}$  zu bestimmen. Nach kurzer Rechnung erhält man

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_v \\ \dot{e}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -l_v c^T \\ bp^T & A - l_x c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_v \\ e_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (g - b)p^T \end{bmatrix} v, \quad (32)$$

worin (22)–(23) und (28)–(29) verwendet wurden. Diese Fehlerdynamik besitzt die gleiche Dynamikmatrix wie der Störbeobachter (28)–(29) und somit auch die mittels  $l_v$  und  $l_x$  vorgegebenen Eigenwerte. Jedoch wird sie für den

Fall, dass der Störeingangsvektor  $g$  der Originalstrecke von dem zum Entwurf verwendeten fiktiven Störeingangsvektor  $g_f = b$  abweicht, durch die Störmodellzustände  $v$  angeregt. Dies ist plausibel, da es sich bei (28)–(29) nur um einen Störbeobachter bezüglich des durch  $g_f$  beschriebenen Störeingriffsorts handelt.

Setzt man (30) in (1) ein, so ergibt sich nach einer einfachen Umformung

$$\dot{x} = (A - bk_x^T)x + bk_x^T(x - \hat{x}) + (g - b)p^T v + bp^T(v - \hat{v}). \quad (33)$$

Zusammen mit (32) wird damit das dynamische Verhalten des geregelten Systems durch

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \\ \dot{e}_v \\ \dot{e}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \\ e_v \\ e_x \end{bmatrix} \quad (34)$$

mit

$$\tilde{A}_{21} = \begin{bmatrix} (g - b)p^T \\ 0 \\ (g - b)p^T \end{bmatrix} \quad (35)$$

und

$$\tilde{A}_{22} = \left[ \begin{array}{c|cc} A - bk_x^T & bp^T & bk_x^T \\ \hline 0 & S & -l_v c^T \\ 0 & bp^T & A - l_x c^T \end{array} \right] \quad (36)$$

beschrieben. Aus der unteren Blockdreiecksstruktur der Dynamikmatrix in (34) und der oberen Blockdreiecksmatrix in (36) folgt somit die Gültigkeit des Separationsprinzips.

**Satz 2. (Separationsprinzip (SISO))** Für die Regelung bestehend aus der Eingrößenstrecke (1)–(2) und dem Regler (28)–(30) gilt das Separationsprinzip, d. h. die Regelungseigenwerte setzen sich aus den Eigenwerten von  $A - bk_x^T$  und den Eigenwerten von (28)–(29) zusammen.

### 4.3 Internes Modellprinzip

Entsprechend zur klassischen beobachterbasierten Störgrößenaufschaltung stellt der Regler (28)–(30) auch die robuste asymptotische Störkompensation sicher, d. h. es gilt das interne Modellprinzip. Um es für ihn nachzuweisen, setzt man (30) in (29) ein, was eine Reglerbeschreibung in Form der *dynamischen Ausgangsrückführung*

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{v}} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -l_v c^T \\ 0 & A - bk_x^T - l_x c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_v \\ l_x \end{bmatrix} y \quad (37)$$

$$u = -p^T \hat{v} - k_x^T \hat{x} \quad (38)$$

ergibt. Die in (37) auftretende obere Blockdreiecksmatrix macht deutlich, dass der Regler die Eigenwerte des Störmodells (3) besitzt. Damit das interne Modellprinzip erfüllt ist, müssen diese als Pole im Übertragungsverhalten des offenen Kreises auftreten, dürfen also weder durch invariante Nullstellen des Reglers noch der Strecke kompensiert werden. Der nächste Satz zeigt, unter welchen Bedingungen dies sichergestellt ist.

**Satz 3. (Internes Modellprinzip (SISO))** Es gelte  $(p^T, S)$  beobachtbar und die Regelung bestehend aus der Eingrößenstrecke (1)–(2) sowie dem Regler (28)–(30) sei für den Nominalfall asymptotisch stabil entworfen. Dann gilt das interne Modellprinzip und die resultierende verallgemeinerte beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung (28)–(30) bewirkt die robuste asymptotische Kompensation der Störungen (3)–(4) unabhängig von ihrem Eingriffsort.

**Beweis:** Der Beweis, dass keine Kompensation der Störmodelleigenwerte durch invariante Nullstellen des Reglers vorkommt, lässt sich mit gleicher Argumentation wie im Anhang führen. Da die Regelung als asymptotisch stabil angenommen wird und (31) notwendig für die Stabilisierbarkeit der Regelung ist, können auch keine Störmodelleigenwerte, die als Pole des Reglers auftreten, durch invariante Streckennullstellen kompensiert werden. Damit werden alle Störmodelleigenwerte zu Polen des offenen Kreises.  $\square$

### 4.4 Vergleich mit dem Ansatz von Davison

Um den neuen Reglerentwurf weiter zu untersuchen, ist es naheliegend, ihn mit der klassischen Anwendung des internen Modellprinzips gemäß Davison zu vergleichen (siehe z. B. [7, Kap. 3.7.2]). Bei letzterer Vorgehensweise wird die Strecke (1)–(2) um das Störmodell (3) erweitert und auf dieses die Regelgröße  $y$  aufgeschaltet. Dies führt auf die *erweiterte Strecke*

$$\dot{\hat{v}} = S\hat{v} + b_y y, \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^{n_v} \quad (39)$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (40)$$

$$y = c^T x, \quad (41)$$

wobei die Störungen für den weiteren Entwurf keine Rolle spielen und deshalb in (40) unberücksichtigt bleiben. Anschließend erfolgt die Bestimmung einer Zustandsrückführung

$$u = -r_v^T \hat{v} - r_x^T x \quad (42)$$

zur Stabilisierung der erweiterten Strecke, was robuste asymptotische Störkompensation bewirkt (siehe z. B. [7,

Kap. 3.7]). Für die Steuerbarkeit der erweiterten Strecke (39)–(41) sind die Bedingungen

$$(S, b_y) \text{ und } (A, b) \text{ steuerbar} \quad (43)$$

sowie

$$\det \begin{bmatrix} A - sI & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in \sigma(S) \quad (44)$$

notwendig und hinreichend (siehe z. B. [7, Kap. 3.7.2]). Die Implementierung von (42) erfolgt dann mittels eines Zustandsbeobachters

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + l(y - c^T \hat{x}) \quad (45)$$

für die Strecke (40)–(41), der für  $(c^T, A)$  beobachtbar existiert. Hieran erkennt man bereits eine *Dualität* zu dem im letzten Abschnitt eingeführten Regler. Bei letzterem wird für die erweiterte Strecke (22)–(24) ein Zustandsbeobachter (28)–(29) bestimmt, während bei der klassischen Vorgehensweise für die erweiterte Strecke (39)–(40) der Entwurf einer Zustandsrückführung (42) erfolgt. Umgekehrt wird im neuen Entwurfsverfahren für die nicht erweiterte Strecke (23) der Zustandsrückführvektor  $k_x^T$  entworfen (siehe (27)), wohingegen beim klassischen Ansatz für die nicht erweiterte Strecke (40) ein Zustandsbeobachter (45) ausgelegt wird.

Diese Dualität lässt sich noch genauer erkennen, wenn man die Dynamikmatrix

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} S & b_y c^T \\ -br_v^T & A - br_x^T \end{bmatrix} \quad (46)$$

der aus (39)–(40) und (42) folgenden Regelung

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{v}} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (47)$$

mit der transponierten Dynamikmatrix

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} S^T & pb^T \\ -c^T l_v^T & A^T - c^T l_x^T \end{bmatrix} \quad (48)$$

der Fehlerdynamik (32) vergleicht. Diese Matrizen – und damit auch der zugehörige Entwurf – lassen sich durch die Substitutionen

$$S \rightarrow S^T, b_y \rightarrow (p^T)^T, c^T \rightarrow b^T, r_v^T \rightarrow l_v^T, A \rightarrow A^T \text{ und } r_x^T \rightarrow l_x^T$$

ineinander überführen. Folglich handelt es sich zusammen mit der klassischen Dualität

$$l \rightarrow (k_x^T)^T$$

zwischen der Zustandsrückführung in (30) und dem Beobachter (45) (siehe z. B. [5, Kap. 3.6.2]) bei diesen Substitutionen um *Dualitätsbeziehungen*, und der neue Reglerentwurf ist in diesem Sinn *dual* zum Davisonansatz für robuste asymptotische Störkompensation. Darüber hinaus lassen sich die Existenzbedingungen für den Entwurf, wie z. B. die Existenzbedingungen (43)–(44) und die Existenzbedingungen (12) und (31), unter Verwendung der Dualitätsbeziehungen ineinander überführen.

## 4.5 Berücksichtigung von Stellsignalbegrenzungen

Die klassische und die neue (duale) Vorgehensweise zur Anwendung des internen Modellprinzips sind bezüglich der Entwurfsbedingungen gleichwertig, wenn man beobachterbasierte Regler entwirft. Die Frage ist dann, welche der Vorgehensweisen vorzuziehen ist. Dies lässt sich beantworten, wenn man Stellsignalbegrenzungen beim Reglerentwurf systematisch berücksichtigen will. Hierzu betrachtet man die Strecke (1)–(2) mit dem Störmodell (3)–(4) und einer *Stellsignalbegrenzung*

$$\text{sat}_0(u) = \begin{cases} u_0^{\max} & : u > u_0^{\max} \\ u & : u_0^{\min} \leq u \leq u_0^{\max}, \quad u_0^{\max} > u_0^{\min} \\ u_0^{\min} & : u < u_0^{\min} \end{cases} \quad (49)$$

Dies führt auf die nichtlineare Streckenbeschreibung

$$\dot{v} = Sv, \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^{n_v} \quad (50)$$

$$\dot{x} = Ax + b \text{ sat}(u) + gp^T v, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (51)$$

$$y = c^T x, \quad (52)$$

worin für eine einfachere Darstellung  $\text{sat}_0(u) = \text{sat}(u)$  gesetzt wurde. Ein grundsätzliches Problem bei der Anwendung von Reglern mit Störmodellen ist die Verschlechterung des Regelungsverhaltens durch Stellsignalbegrenzungen. Um dies zu erkennen, betrachtet man den Begrenzungsfall  $u < u_0^{\min}$  oder  $u > u_0^{\max}$ . Dann ist das auf die Strecke wirkende begrenzte Stellsignal  $\text{sat}(u)$  unabhängig von dem vom Regler erzeugten Stellsignalverlauf  $u$  entweder gleich  $u_0^{\max}$  oder  $u_0^{\min}$  und somit konstant. Damit hat der Regler im Begrenzungsfall keinen Einfluss mehr auf die Strecke, womit nur noch die im offenen Kreis auftretende Dynamik wirksam ist.

Bei Verwendung des Ansatzes von Davison besitzt der Regler aufgrund der Störmodelle (39) Eigenwerte auf der Imaginärachse. Folglich laufen im Begrenzungsfall die Reglerzustände weg und die Regelungsdynamik kann sich

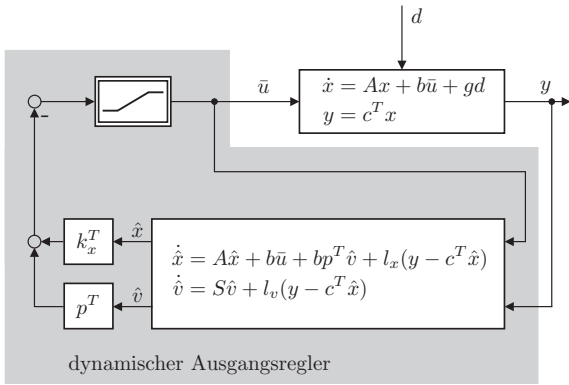


Abbildung 1: Dualer Ansatz zur robusten asymptotischen Störkompensation mittels Formulierung als Störgrößenaufschaltung mit Störbeobachter.

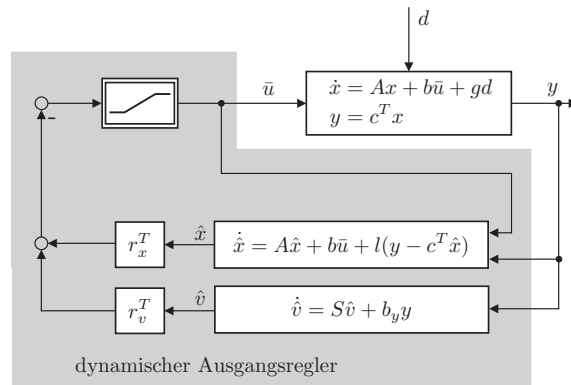


Abbildung 2: Klassische robuste Störkompensation nach Davison mittels explizitem angeregtem Störmodell in der Rückführung.

dadurch verschlechtern oder sogar instabil werden, was man als *Regler-Windup* bezeichnet (siehe [9, 10]).

Im Gegensatz dazu lässt sich dieses Problem bei der dualen Methode grundsätzlich vermeiden, da die Stellsignalbegrenzung einfach beim Entwurf mitberücksichtigt werden kann. Hierfür wird der Störbeobachter (28)–(29) für die Strecke in der Form (22)–(24) mit Stellsignalbegrenzung entworfen. Dies führt unmittelbar auf

$$\dot{\hat{v}} = S\hat{v} + l_v(y - c^T\hat{x}) \tag{53}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + b \text{sat}(u) + bp^T\hat{v} + l_x(y - c^T\hat{x}). \tag{54}$$

Die resultierende Regelung ist in Abbildung 1 dargestellt, wobei das begrenzte Stellsignal  $\bar{u} = \text{sat}(u)$  vom Regler gebildet wird. In diesem Fall spricht die Stellsignalbegrenzung in der Strecke nicht mehr an, weshalb sie in der Abbildung weggelassen wurde.

Bei Stellsignalbegrenzung ist im zugehörigen offenen Kreis nur die asymptotisch stabile Beobachterdynamik von (53)–(54) wirksam, womit ein Regler-Windup nicht auftreten kann. Dieser Sachverhalt lässt sich auch strukturell anhand von Abbildung 1 leicht verdeutlichen. Die Störmodelleigenwerte treten beim dynamischen Ausgangsregler nur auf, wenn die Rückführschleife über  $\bar{u}$  wirksam ist, weil sich dann die dynamische Ausgangsrückführung (37)–(38) ergibt. Im Begrenzungsfall ist jedoch diese Rückführung aufgrund des im Regler enthaltenen Modells der Stellsignalbegrenzung unterbrochen, womit die auf der Imaginärachse und ansonsten den Regler-Windup verursachenden Störmodelleigenwerte im Reglerübertragungsverhalten nicht auftreten. Ein weiterer Vorteil des dualen Reglerentwurfs besteht darin, dass im Begrenzungsfall weiterhin die Fehlerdifferentialgleichung (32) gilt, da im Beobachter (53)–(54) die begrenzten Stellsignale eingespeist werden. Damit wird auch im Begrenzungsfall der

Reglerzustand weiterhin richtig aufgebaut und somit einer Verschlechterung der Regelungsdynamik durch Stellsignalbegrenzungen entgegengewirkt. Dies macht deutlich, dass der neue Ansatz bereits beim Entwurf die systematische Vermeidung des Regler-Windups ermöglicht.

Im Vergleich dazu lässt sich beim Davisonansatz das begrenzte Stellsignal nur im Beobachter für den Streckenzustand berücksichtigen, was auf den Regler

$$\dot{\hat{v}} = S\hat{v} + b_y y \tag{55}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + b \text{sat}(u) + l(y - c^T\hat{x}) \tag{56}$$

$$u = -r_v^T\hat{v} - r_x^T\hat{x} \tag{57}$$

in Abbildung 2 führt. Bei diesem tritt das Störmodell (55) immer – und somit auch im Begrenzungsfall – explizit im Reglerübertragungsverhalten auf, was man anhand der unteren Rückführung in Abbildung 2 deutlich erkennen kann. Somit bedarf es hier einer zusätzlichen Stabilisierungsmaßnahme für das durch  $y$  angeregte Störmodell, um den Regler-Windup zu unterbinden (siehe [9, 10]).

Wenn nach vollständiger Beseitigung des Regler-Windups Stellsignalbegrenzungen eine Verschlechterung des Regelungsverhaltens bewirken, dann ist dies nur noch auf die Streckendynamik zurückzuführen. Aus diesem Grund wird dieser Windup-Effekt in [8] als *Strecken-Windup* bezeichnet. Eine Möglichkeit ihn zu analysieren besteht darin, den in Abbildung 1 dargestellten Regelkreis als *nichtlinearen Standardregelkreis* mit Linearteil und Sektornichtlinearität aufzufassen (siehe z. B. [4]). Zur Bestimmung des Übertragungsverhaltens der linearen Dynamik im Regelkreis betrachtet man mit (1), (32) und (38)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_v \\ \dot{e}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & S & -l_v c^T \\ 0 & bp^T & A - l_x c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_v \\ e_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u} \tag{58}$$

$$u = - \begin{bmatrix} k_x^T & -p^T & -k_x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_v \\ e_x \end{bmatrix} \quad (59)$$

für den störungsfreien Fall, d. h.  $v \equiv 0$ . Hieraus folgt unter Verwendung von  $u_L = -u$  unmittelbar das Übertragungsverhalten

$$u_L(s) = k_x^T (sI - A)^{-1} b \bar{u}(s) \quad (60)$$

für den Linearteil. Damit kann basierend auf der in [9, 10] sowie in [11, Th. 4.3] dargestellten Vorgehensweise die globale asymptotische Stabilität der Ruhelage  $x = 0$  des nichtlinearen Regelkreises einfach untersucht werden, sofern die Strecke die hierfür notwendigen Voraussetzungen erfüllt. Darüber hinaus ist der systematische Entwurf eines global asymptotisch stabilisierenden Rückführvektors  $k_x^T$  auf Grundlage des „positive real“-Lemmas möglich (siehe [9, 10] und [11, Th. 4.3]).

## 5 Verallgemeinerung auf Mehrgrößensysteme

Im Folgenden soll das neue Reglerentwurfverfahren auf Mehrgrößensysteme in der Zustandsbeschreibung

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gd, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (61)$$

$$y = Cx \quad (62)$$

mit dem Eingangsvektor  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $m > 1$ , und dem messbaren Vektor  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  der Regelgrößen verallgemeinert werden. Der Vektor der nicht messbaren Störungen  $d(t) \in \mathbb{R}^l$  lässt sich durch das *Störmodell*

$$\dot{v} = Sv, \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^{n_v} \quad (63)$$

$$d = Pv \quad (64)$$

beschreiben, wobei  $S$  nur Eigenwerte auf der Imaginärachse besitzt. Entsprechend zu Abschnitt 2 sei  $(A, B)$  als steuerbar sowie  $(C, A)$  und  $(P, S)$  als beobachtbar angenommen.

Im Unterschied zu Eingrößensystemen kann hier die in Abschnitt 4 dargestellte Vorgehensweise nicht unmittelbar zur Bestimmung der dualen Form des Ansatzes von Davison genutzt werden. Dies liegt daran, dass das *interne Modellprinzip* im Mehrgrößensystem die  $m$ -fache Realisierung des Störmodells (63) erfordert (siehe [3]). Ein Störbeobachter und damit die resultierende beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung besitzt jedoch auch im Mehrgrößensystem nur ein einziges Störmodell (63), womit i. Allg. keine robuste asymptotische Störkompensation erzielt werden kann.

Um dennoch die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts auf den Mehrgrößensystemfall erweitern zu können, wird durch geeignete Wahl der Entwurfstrecke für die verallgemeinerte beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung die Dualität zum Ansatz von Davison hergestellt (siehe Abschnitt 4.4). Bei letzterem werden im Mehrgrößensystemfall  $m$  Störmodelle durch jeweils eine Regelgröße  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , angeregt (siehe z. B. [7, Kap. 3.7.2]), d. h. für die *erweiterte Strecke* gilt

$$\dot{v}^i = S v^i + b_{y_i} y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (65)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (66)$$

$$y = Cx \quad (67)$$

oder

$$\dot{v}^* = S^* v^* + B_y y \quad (68)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (69)$$

$$y = Cx, \quad (70)$$

wenn man mit

$$\hat{v}^* = \begin{bmatrix} \hat{v}^1 \\ \hat{v}^2 \\ \vdots \\ \hat{v}^m \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S^* = \begin{bmatrix} S & & & \\ & S & & \\ & & \ddots & \\ & & & S \end{bmatrix} \quad (71)$$

sowie

$$B_y = \begin{bmatrix} b_{y_1} & & & \\ & b_{y_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{y_m} \end{bmatrix} \quad (72)$$

die  $m$  Störmodelle (65) zusammenfasst. Mit  $g_f = b$  und Blick auf die Streckendarstellung (22)–(24) für den Eingrößensystemfall motiviert dies folgende Streckendarstellung für den Entwurf einer verallgemeinerten beobachterbasierten Störgrößenaufschaltung im Mehrgrößensystemfall

$$\dot{v}^* = S^* v^* \quad (73)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu + BQv^* + (GP^* - BQ)v^* \quad (74)$$

$$y = Cx \quad (75)$$

mit

$$v^* = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^m \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad P^* = \begin{bmatrix} P & 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

sowie einer noch zu wählenden Matrix  $Q$ . Die Matrix  $P^*$  ergibt sich, wenn man  $v^1$  zur Modellierung der Störung  $d$



verwendet (siehe (63)–(64)), wozu prinzipiell auch jeder andere Störmodellzustand  $v^i$ ,  $i = 2, 3, \dots, m$ , herangezogen werden kann. In der Entwurfsstrecke (73)–(75) wurde berücksichtigt, dass sie im Unterschied zum Eingrößenfall durch  $m$  Störmodelle angeregt wird. Diese treten dann auch im zu entwerfenden Störbeobachter und somit im zugehörigen Ausgangsregler auf, womit eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit des internen Modellprinzips erfüllt ist.

Die Form der Matrix  $Q$  lässt sich festlegen, wenn man beachtet, dass in (65) jedes der  $m$  Störmodelle nur durch eine einzige Komponente  $y_i$  der Regelgröße angeregt wird. Um davon ausgehend die Dualität zur Entwurfsstrecke (73)–(75) zu gewährleisten, muss die Matrix  $Q$  die allgemeine Form

$$Q = \begin{bmatrix} q_1^T & & & \\ & q_2^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_m^T \end{bmatrix} \quad (77)$$

besitzen. In diesem Fall gilt mit  $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]$  in (74) die Beziehung  $BQv^* = b_1 q_1^T v^1 + \dots + b_m q_m^T v^m$ , womit jede der angreifenden Störungen  $q_i^T v^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , nur durch jeweils ein einziges Störmodell (63) beschrieben wird. Wie noch dargelegt wird, führt dies auf eine duale Formulierung des Davisonansatzes im Mehrgrößenfall.

Die Auswirkung des in (74) unbekanntem Störeingriffs  $(GP^* - BQ)v^*$  wird aufgrund der noch zu zeigenden Robustheit der resultierenden verallgemeinerten beobachterbasierten Störgrößenaufschaltung ebenfalls asymptotisch ausgeglet.

Der Beobachter für (73)–(75) lautet

$$\dot{\hat{v}}^* = S^* \hat{v}^* + L_v(y - C\hat{x}) \quad (78)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + BQ\hat{v}^* + L_x(y - C\hat{x}) \quad (79)$$

mit  $\hat{v}^*(0) = \hat{v}_0^* \in \mathbb{R}^{m \cdot n_v}$  und  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Die über diesen Störbeobachter implementierte Störgrößenaufschaltung für asymptotische Störkompensation des bekannten Störterms in (74) ist durch das Stellgesetz

$$u = -Q\hat{v}^* - K_x \hat{x} \quad (80)$$

gegeben. Im eingeschwungenen Zustand kompensiert es den bekannten Störterm in (74) und stabilisiert die resultierende Dynamik, wenn  $A - BK_x$  eine Hurwitz-Matrix ist. Aufgrund der vorausgesetzten Steuerbarkeit von  $(A, B)$  ist letzteres stets möglich. Der resultierende Regler (78)–(80) besitzt die Ordnung  $mn_v + n$ . Diese stimmt mit der Reglerordnung bei Anwendung des Ansatzes von Davison überein, wenn ein Zustandsbeobachter der Ordnung  $n$  für (66)

verwendet wird, da zusätzlich noch die  $m$  Störmodelle der Ordnung  $n_v$  in (65) zu realisieren sind.

Zum Nachweis des Separationsprinzips im Mehrgrößenfall bildet man unter Verwendung von (71), (73) sowie (61)–(64) und (78)–(79) die Differentialgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{v^*} \\ \dot{e}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^* & -L_v C \\ BQ & A - L_x C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{v^*} \\ e_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ GP^* - BQ \end{bmatrix} v^* \quad (81)$$

der Beobachtungsfehler  $e_{v^*} = v^* - \hat{v}^*$  und  $e_x = x - \hat{x}$ . Die Bedingungen, unter denen sich für dieses System alle Eigenwerte durch Wahl von  $L_v$  und  $L_x$  beliebig vorgeben lassen, sind im nächsten Satz angegeben.

**Satz 4. (Stabilisierbarkeit der Fehlerdynamik (MIMO))** Das Matrixpaar

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S^* & 0 \\ BQ & A \end{bmatrix} \right) \quad (82)$$

ist genau dann beobachtbar, wenn  $(Q, S^*)$  und  $(C, A)$  beobachtbar sind sowie

$$\det \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in \sigma(S) \quad (83)$$

gilt.

**Beweis:** Den Beweis findet man in [14].  $\square$

Aufgrund der speziellen Form von  $Q$  gemäß (77) und von  $S^*$  gemäß (71) folgt aus diesem Satz, dass die Wahl der Vektoren  $q_i^T$  in (77) die Beobachtbarkeit von  $(q_i^T, S)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , sicherstellen muss. Dies stimmt mit der entsprechenden Forderung für den Ansatz von Davison überein, bei der die Anregungsvektoren  $b_{y_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , in (65) so zu wählen sind, dass  $(S, b_{y_i})$  steuerbar ist (siehe z. B. [7, Kap. 3.7.2]).

Entsprechend zum Eingrößenfall lässt sich auch im Mehrgrößenfall das Separationsprinzip für den Entwurf des Reglers (78)–(80) nachweisen, was Aussage des folgenden Satzes ist.

**Satz 5. (Separationsprinzip (MIMO))** Für die Regelung bestehend aus der Mehrgrößenstrecke (61)–(62) und dem Regler (78)–(80) gilt das Separationsprinzip, d. h. die Regelungseigenwerte setzen sich aus den Eigenwerten von  $A - BK_x$  und den Eigenwerten von (78)–(79) zusammen.

**Beweis:** Den Beweis lässt sich auf die gleiche Art und Weise wie in Abschnitt 4.2 führen.  $\square$

Um die Dualität des Reglers (78)–(80) mit dem Ansatz von Davison nachzuweisen, betrachtet man die Zustandsrückführung

$$u = -R_v \hat{v}^* - R_x x \quad (84)$$

für die erweiterte Strecke (65)–(67). Falls die resultierende Regelung asymptotisch stabil ist, wird robuste asymptotische Störkompensation erzielt (siehe z. B. [7, Kap. 3.7.2]). Die Realisierung von (84) erfolgt dabei durch den Zustandsbeobachter

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}). \quad (85)$$

Als Dynamikmatrix dieser Regelung erhält man

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} S^* & B_y C \\ -BR_v & A - BR_x \end{bmatrix}, \quad (86)$$

worin (71) verwendet wurde. Ein Vergleich mit der transponierten Dynamikmatrix

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} (S^*)^T & Q^T B^T \\ -C^T L_v^T & A^T - C^T L_x^T \end{bmatrix} \quad (87)$$

der Fehlerdifferentialgleichung (81) führt mit (71) unmittelbar auf die *Dualitätsbeziehungen*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S^T, B_y \rightarrow Q^T, C \rightarrow B^T, R_v \rightarrow L_v^T, A \rightarrow A^T \\ \text{und } R_x &\rightarrow L_x^T. \end{aligned} \quad (88)$$

Zusammen mit der klassischen Dualität

$$L \rightarrow K_x^T \quad (89)$$

zwischen dem Beobachter (85) und der Zustandsrückführung in (80) (siehe z. B. [5, Kap. 9.6.2]) handelt es sich somit bei (78)–(80) um eine *duale Formulierung* des Ansatzes von Davison im Mehrgrößenfall.

Die Gültigkeit des internen Modellprinzips bzw. die robuste asymptotische Störkompensation mittels des Reglers (78)–(80) ist eine direkte Konsequenz der gerade gezeigten Dualität zum klassischen Ansatz von Davison. Der nächste Satz gibt die hieraus folgenden Bedingungen an.

**Satz 6. (Internes Modellprinzip (MIMO))** Die Vektoren  $q_i, i = 1, 2, \dots, m$ , seien so gewählt, dass die Paare  $(q_i^T, S)$  beobachtbar sind. Weiterhin sei die Regelung bestehend aus der Mehrgrößenstrecke (61)–(62) sowie dem Regler (78)–(80) für den Nominalfall asymptotisch stabil entworfen. Dann bewirkt die resultierende verallgemeinerte beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung (78)–(80) die robuste asymptotische Kompensation der Störungen (63)–(64) unabhängig von ihrem Eingriffsort, d. h. es gilt das interne Modellprinzip.

**Beweis:** Zum Nachweis des internen Modellprinzips setzt man (80) in (79) ein, was die *dynamische Ausgangsrückführung*

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{v}}^* \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^* & -L_v C \\ 0 & A - BK_x - L_x C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}^* \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_v \\ L_x \end{bmatrix} y \quad (90)$$

$$u = -Q\hat{v}^* - K_x \hat{x} \quad (91)$$

ergibt. Bildet man zu diesem Regler das *duale System*, so führt dies auf

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{v}}^* \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (S^*)^T & 0 \\ -C^T L_v^T & A^T - C^T L_x^T - K_x^T B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}^* \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q^T \\ K_x^T \end{bmatrix} \bar{y} \quad (92)$$

$$\bar{u} = - \begin{bmatrix} L_v^T & L_x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}^* \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (93)$$

(siehe z. B. [15, Kap. 1.3.3]). Diese dynamische Ausgangsrückführung erhält man auch durch Anwendung des klassischen Ansatzes von Davison auf das zur erweiterten Strecke (68)–(70) duale System, welches sich durch Anwendung der Dualitätsbeziehungen (88) ergibt. Aus den Dualitätsbeziehungen (88)–(89) folgt ebenfalls, dass für diesen klassischen Davisonregler die zugehörigen Entwurfsbedingungen erfüllt sind, wenn dies für die verallgemeinerte beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung zutrifft. Deshalb stellt (92)–(93) das interne Modellprinzip im dualen Fall sicher und somit muss das zugehörige Reglerübertragungsverhalten die allgemeine Form

$$\bar{u}(s) = \frac{1}{\det(sI - S^T)} Z_R(s) N_R^{-1}(s) \bar{y}(s) \quad (94)$$

besitzen (siehe [3]), worin die Polynommatrizen  $Z_R(s)$  und  $\det(sI - S^T)N_R(s)$  rechtsprim sind. Dies bedeutet, dass keine Nullstelle von  $\det(sI - S^T)$  durch Übertragungsnullstellen des Reglers, d. h. Nullstellen von  $\det Z_R(s)$  gekürzt werden kann. Ein Vergleich von (90)–(91) und (92)–(93) macht deutlich, dass man die Reglerübertragungsmatrix von (90)–(91) durch Transposition von (94) erhält. Somit gilt für das Übertragungsverhalten der verallgemeinerten beobachterbasierten Störgrößenaufschaltung

$$u(s) = \frac{1}{\det(sI - S)} (N_R^T(s))^{-1} Z_R^T(s) y(s), \quad (95)$$

worin  $\det(sI - S)N_R^T(s)$  und  $Z_R^T(s)$  linksprim sind und somit keine Kompensation zwischen Nullstellen des Reglers und Nullstellen von  $\det(sI - S)$ , also den Eigenwerten des Störmodells (63)–(64) vorkommen kann. Aufgrund der vorausgesetzten asymptotischen Stabilität der Regelung mit diesem Regler und der hierfür notwendigen Bedingung (83) kann ebenfalls keine Kompensation zwischen invarianten Streckennullstellen und den Nullstellen von  $\det(sI - S)$  auftreten. Damit sind die in [1, Th. 9-22 und S. 499] angegebenen Bedingungen für die Gültigkeit des internen Modellprinzips erfüllt, und diese Eigenschaft somit für die verallgemeinerte beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung im Mehrgrößenfall nachgewiesen. □

Bei praktischen Anwendungen ist häufig eine *Stellsignalbegrenzung*

$$\text{sat}(u) = \begin{bmatrix} \text{sat}_1(u_1) \\ \text{sat}_2(u_2) \\ \vdots \\ \text{sat}_m(u_m) \end{bmatrix} \quad (96)$$

in (61) zu berücksichtigen, was auf die nichtlineare Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{x} = Ax + B \text{sat}(u) + Gd, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (97)$$

in der Streckenbeschreibung (61)–(62) führt. Auftretende Stellsignalbegrenzungen können Regler-Windup-Effekte hervorrufen, die sich bei der Realisierung des Reglers (78)–(80) entsprechend Abschnitt 4.5 durch Nachbildung der Stellsignalbegrenzung im Beobachter (78)–(79) vollständig verhindern lassen. Man erhält so aus (78)–(80) den Regler

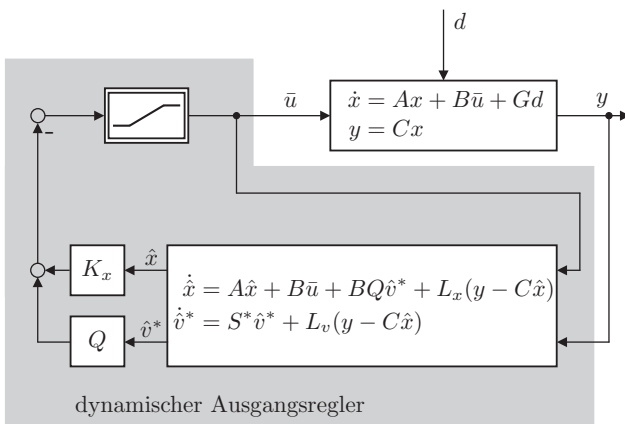
$$\dot{\hat{v}}^* = S^* \hat{v}^* + L_v(y - C\hat{x}) \quad (98)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B \text{sat}(u) + BQ\hat{v}^* + L_x(y - C\hat{x}) \quad (99)$$

$$u = -Q\hat{v}^* - K_x\hat{x} \quad (100)$$

mit *Regler-Windup-Vermeidung*, der in Abbildung 3 dargestellt ist. Dies macht deutlich, dass sich auch im Mehrgrößenfall der Regler-Windup vollständig durch die Beobachertechnik vermeiden lässt. Darüber hinaus lässt sich unter Verwendung von (61), (80) und (81) entsprechend zum SISO-Fall leicht zeigen, dass der Linearteil des nichtlinearen Regelkreises in Abbildung 3 das Übertragungsverhalten

$$u_L(s) = K_x(sI - A)^{-1}B\bar{u}(s) \quad (101)$$



**Abbildung 3:** Dualer Mehrgrößenansatz zur robusten asymptotischen Störkompensation mittels Formulierung als Störgrößenaufschaltung mit Störbeobachter.

besitzt. Damit kann der Strecken-Windup wie im Eingrößenfall mit Hilfe des „positive real“-Lemmas untersucht und durch einen geeigneten Entwurf von  $K_x$  vermieden werden (für Details siehe [9, 10] und [11, Th. 4.3]).

## 6 Beispiel

Betrachtet wird das Eingrößensystem

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} d \quad (102)$$

$$y = [3 \quad -1 \quad 1] x, \quad (103)$$

welches die Eigenwerte  $\lambda_i = -1, i = 1, 2, 3$ , besitzt. Die nicht messbare Störung  $d$  sei abschnittsweise konstant und lässt sich somit durch das Störmodell

$$\dot{v} = 0, \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R} \quad (104)$$

$$d = v \quad (105)$$

beschreiben.

Der Störeingriffsvektor sei für den Entwurf nicht bekannt, womit eine klassische Störgrößenaufschaltung nicht bestimmt werden kann. Setzt man jedoch voraus, dass die Regelgröße  $y$  messbar ist, dann kann eine verallgemeinerte beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung entworfen werden. Für deren Bestimmung sollen die Eigenwerte  $\tilde{\lambda}_{R1} = -2, \tilde{\lambda}_{R2} = -3$  und  $\tilde{\lambda}_{R3} = -4$  für die Matrix  $A - b k_x^T$  vorgegeben werden. Dies führt mit  $p = 1$  (siehe (105)) auf das Stellgesetz

$$u = -[23 \quad 23 \quad 6] \hat{x} - \hat{v}, \quad (106)$$

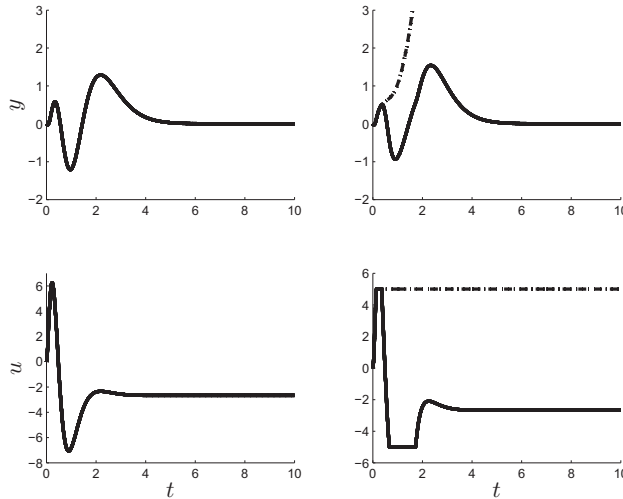
welches durch den Entwurf eines Störbeobachters (28)–(29) für die Strecke mit dem gewählten fiktiven Störeingangsvektor  $g_f = b$  implementiert wird. Wenn man die Beobachtereigenwerte  $\lambda_{B1} = -3, \lambda_{B2} = -4, \lambda_{B3} = -5$  und  $\lambda_{B4} = -6$  vorgibt und die Stellsignalbegrenzung in (102) berücksichtigt, so lautet er

$$\dot{\hat{v}} = 120(y - c^T \hat{x}) \quad (107)$$

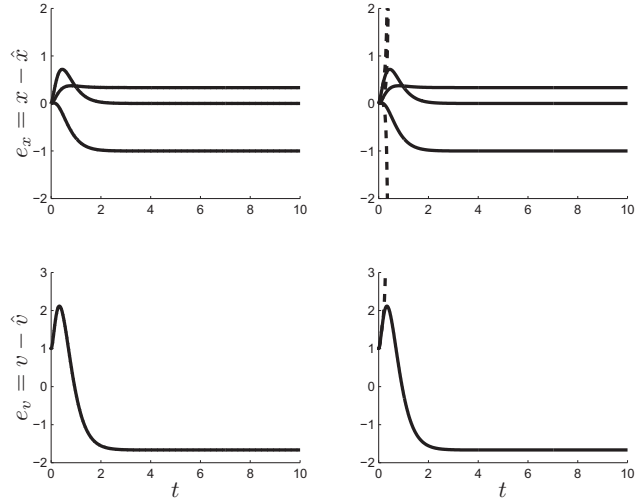
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + b(\text{sat}(u) + \hat{v}) + \begin{bmatrix} 14,28 \\ 36,52 \\ 8,68 \end{bmatrix} (y - c^T \hat{x}) \quad (108)$$

mit  $\hat{v}(0) = \hat{v}_0 \in \mathbb{R}$  und  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ .

Anhand von (106)–(108) lässt sich im unbegrenzten Fall die dynamische Ausgangsrückführung (37)–(38) mit



**Abbildung 4:** Simulation der Regelung für einen Einheits-Störsprung ohne Stellsignalbegrenzung (links) und mit einer Stellsignalbegrenzung von  $u_0^{\max} = -u_0^{\min} = 5$  (rechts), wobei die gestrichelten Verläufe die Simulationsergebnisse ohne Regler-Windup-Vermeidung darstellen.



**Abbildung 5:** Verlauf der Beobachtungsfehler  $e_v = v - \hat{v}$  und  $e_x = x - \hat{x}$  ohne Stellsignalbegrenzung (links) und mit Stellsignalbegrenzung (rechts), wobei die gestrichelten Verläufe die Simulationsergebnisse ohne Regler-Windup-Vermeidung darstellen.

dem Übertragungsverhalten

$$\begin{aligned} F_R(s) &= \frac{u(s)}{y(s)} \\ &= \frac{-1340,5(s + 1,361)(s^2 + 2,281s + 1,579)}{s(s + 47,86)(s - 22,35)(s - 1,511)} \end{aligned} \quad (109)$$

bestimmen.

Dieser Regler besitzt einen unkompenzierten Pol bei  $s = 0$ , der mit dem Störmodelleigenwert von (104) übereinstimmt. Folglich bewirkt die entworfene verallgemeinerte beobachterbasierte Störgrößenaufschaltung (106)–(108) zusammen mit der Tatsache, dass die Strecke (102)–(103) keine Nullstelle bei  $s = 0$  besitzt, gemäß des internen Modellprinzips die robuste asymptotische Kompensation von abschnittsweise konstanten Störsignalen unabhängig vom Störeingriffsort. Dies lässt sich auch anhand der Simulationsergebnisse der Regelung für einen Einheits-Störsprung in Abbildung 4 links erkennen. Auf der rechten Seite sind die Simulationsergebnisse der Regelung bei einer Stellsignalbegrenzung von  $u_0^{\max} = -u_0^{\min} = 5$  (siehe (49)) dargestellt, wobei der Fall mit und ohne Regler-Windup-Vermeidung betrachtet wird. Bei Berücksichtigung der Stellsignalbegrenzung im Beobachter gemäß (108) führen die nur kurzzeitigen Begrenzungsphasen zu nahezu identischem Störverhalten wie im Fall ohne Stellsignalbegrenzung. Wird die Stellsignalbegrenzung nicht im Beobachter berücksichtigt, so ist im Begrenzungsfall das Reglerübertragungsverhalten (109) wirksam. Dieses besitzt neben dem I-Anteil noch zwei weitere Pole bei  $s = 1,511$  und  $s = 22,35$  in der rechten komplexen Halbebe-

ne. Deshalb bleibt das Stellsignal dauerhaft in der Begrenzung und der Streckenausgang  $y$  schwingt dann auf einen weit vom Sollwert  $y = 0$  abweichenden Stationärwert ein.

Darüber hinaus führt die Nachbildung der Stellsignalbegrenzung im Regler (106)–(108) dazu, dass die Fehlerdifferentialgleichung (32) auch bei begrenzten Stellsignalen weiterhin Gültigkeit besitzt. Dies zeigen auch die Beobachtungsfehler  $e_v = v - \hat{v}$  und  $e_x = x - \hat{x}$  in Abbildung 5, die unabhängig von der Stellsignalbegrenzung den gleichen Verlauf haben. Dies bedeutet, dass im Begrenzungsfall die Reglerzustände weiterhin richtig aufgebaut werden und insbesondere der Störmodellzustand  $\hat{v}$  nicht wegläuft, da die homogene Fehlerdifferentialgleichung (32) asymptotisch stabil ist und darin  $v$  im betrachteten Fall eine konstante Anregung darstellt. Im Gegensatz dazu zeigt die rechte Spalte in Abbildung 5, dass die Beobachtungsfehler ohne Regler-Windup-Vermeidung aufgrund des instabilen Verhaltens weglaufen.

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass beim neuen Ansatz zur robusten asymptotischen Störkompensation die Regler-Windup-Vermeidung einfach in den Entwurf integriert werden kann. Somit besitzt der duale Ansatz einen methodischen Vorteil gegenüber der klassischen Vorgehensweise nach Davison, die eine zusätzliche Stabilisierungsmaßnahme zur Regler-Windup-Vermeidung erfordert, und ist deshalb dieser vorzuziehen.

## 7 Abschließende Bemerkungen

Die vorgeschlagenen beobachterbasierten Störgrößenaufschaltungen sind besonders als Ausgangsfolgeregler bei der *Zwei-Freiheitsgrade-Zustandsregelung* (siehe [5, 16]) geeignet, da sie eine gezielte Störgrößebekämpfung ohne Regler-Windup-Effekte ermöglichen. Durch Speisung der verallgemeinerten beobachterbasierten Störgrößenaufschaltung mit  $y - w$  anstelle von  $y$  ergibt sich für Führungsgrößen  $w$ , welche die gleiche Signalform wie die Störungen haben, ein *robustes Führungsverhalten*. Darüber hinaus lässt sich ein getrennter Entwurf des Führungsverhaltens sehr einfach durchführen, um die Anregung von Störmodellen, deren Signalform nicht mit denen der Führungsgrößen übereinstimmt, zu vermeiden. Die Auslegung von  $k_x^T$  bzw.  $K_x$  zur Sicherstellung der globalen asymptotischen Stabilität mittels des „positive real“-Lemmas kann zu einem langsamen Regelungsverhalten führen. Um dies unter Beibehaltung der gleichen Stabilitätsaussage zu verhindern, lässt sich die vorgestellte Windup-Vermeidung direkt um ein *Zusatznetzwerk* erweitern (siehe [9, 10]). Letzteres kann auf die gleiche Art und Weise wie in [9, 10] systematisch entworfen werden. Gegenstand weiterführender Untersuchungen ist die Übertragung der Ergebnisse zur semi-globalen Stabilisierung in [17] auf den vorgestellten Reglerentwurf, damit bei der Stabilitätsanalyse auch externe Störeregungen berücksichtigt werden können.

## Anhang: Beweis von Satz 1

Um zu zeigen, dass keine Kompensation der Störmodelleigenwerte mit invarianten Nullstellen des Reglers vorkommt, betrachtet man die *Rosenbrock-Matrix*

$$P(s) = \begin{bmatrix} S - sI & -l_v c^T & l_v \\ 0 & A - b k_x^T - \tilde{l}_x c^T - sI & \tilde{l}_x \\ \gamma^T & -k_x^T & 0 \end{bmatrix} \quad (110)$$

des Reglers (20)–(21) (siehe z. B. [5, Kap. 8.5]). Nach Auswertung an den Eigenwerten  $\lambda_{v,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_v$ , des Störmodells (3) folgt daraus durch Vor- und Nachmultiplikation mit regulären Matrizen

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} P(\lambda_{v,i}) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & c^T & 1 \end{bmatrix} = [A_1 \quad a_2], \quad (111)$$

wenn man

$$A_1 = \begin{bmatrix} S - \lambda_{v,i}I & 0 \\ \gamma^T & -k_x^T \\ 0 & A - b k_x^T - \lambda_{v,i}I \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} l_v \\ 0 \\ \tilde{l}_x \end{bmatrix} \quad (112)$$

eingführt. Es gilt  $\det P(\lambda_{v,i}) \neq 0$ , d. h.  $\lambda_{v,i}$  ist keine invariante Nullstelle des Reglers, genau dann, wenn das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} A_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (113)$$

bzw.

$$A_1 v_1 = -a_2 v_2 \quad (114)$$

nur die triviale Lösung  $v_1 = 0$  und  $v_2 = 0$  besitzt. Zunächst wird hierfür gezeigt, dass (114) für  $v_2 \neq 0$  und damit das resultierende inhomogene Gleichungssystem keine Lösung hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle  $w^T \neq 0^T$  mit  $w^T A_1 = 0^T$  immer auch  $w^T a_2 v_2 \neq 0$  folgt, d. h. die zugehörige *Verträglichkeitsbedingung* von  $a_2 v_2$  nicht erfüllt wird (siehe z. B. [19, Kap. 2.1.4.4]). Wegen  $v_2 \in \mathbb{C}$  und  $v_2 \neq 0$  ist dies mit  $w^T a_2 \neq 0$  gleichbedeutend. Betrachtet man  $w^T A_1 = 0^T$  mit  $w^T = [w_1^T \quad w_2^T]$  sowie  $w_1 \in \mathbb{C}^{n_v+1}$  und  $w_2 \in \mathbb{C}^n$ , so führt dies auf

$$w_1^T \begin{bmatrix} S - \lambda_{v,i}I \\ \gamma^T \end{bmatrix} = 0^T, \quad (115)$$

wenn nur die ersten  $n_v$  Spalten von  $A_1$  berücksichtigt werden. Diese Gleichung besitzt nur eine lineare unabhängige Lösung  $w_1^T$ , da  $(\gamma^T, S)$  beobachtbar ist. Dann hat nämlich die in (115) auftretende  $(n_v + 1, n_v)$ -Matrix gemäß des *Hautus-Kriteriums* (siehe z. B. [5, Kap. 8.3.5]) den Rang  $n_v$ . Um die Beobachtbarkeit von  $(\gamma^T, S)$  nachzuweisen, beachtet man, dass  $(\Pi, \gamma^T)$  Lösung der „regulator equations“ (7)–(8) ist. Multipliziert man sie mit dem Eigenvektor  $v_{v,i}$  zum Eigenwert  $\lambda_{v,i}$  von  $S$ , so führt dies nach Verwendung der Eigenvektorgleichung für  $S$  und einer einfachen Umformung auf

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_{v,i}I & g \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi v_{v,i} \\ p^T v_{v,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \gamma^T v_{v,i} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (116)$$

Nimmt man an, es gelte  $\gamma^T v_{v,i} = 0$ , d. h. das Paar  $(\gamma^T, S)$  ist gemäß des Hautus-Kriteriums nicht beobachtbar, dann folgt aus (116) wegen (13) das Ergebnis  $\Pi v_{v,i} = 0$  und  $p^T v_{v,i} = 0$ . Dies steht im Widerspruch zu (12), da aufgrund des Hautus-Kriteriums  $p^T v_{v,i} \neq 0$  gilt. Folglich muss  $(\gamma^T, S)$  beobachtbar sein. Damit ist die Lösung von (115) bis auf eine nichtverschwindende multiplikative Konstante durch  $w_1^T = [w_{v,i}^T \quad 0]$  gegeben, worin  $w_{v,i}$  der Linkseigenvektor von  $S$  zum Eigenwert  $\lambda_{v,i}$  ist. Aus  $w^T A_1 = 0^T$  wird mit dem gerade bestimmten Vektor  $w_1^T$  dann  $w^T A_1 = [0^T \quad w_2^T (A - b k_x^T - \lambda_{v,i}I)] = 0^T$ . Hieraus folgt  $w_2^T = 0^T$ , da  $A - b k_x^T$  eine Hurwitz-Matrix ist und folglich  $A - b k_x^T - \lambda_{v,i}I$  eine reguläre Matrix darstellt, weil alle Störmodelleigenwerte  $\lambda_{v,i}$  auf der Imaginärachse liegen. Somit existiert

für  $v_2 \neq 0$  keine Lösung von (114), falls  $w^T a_2 = w_{v,i}^T l_v \neq 0$  gilt. Nimmt man an, dies ist nicht der Fall, dann folgt aus

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_{v,i}^T & 0^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & -l_v c^T \\ g p^T & A - l_x c^T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} w_{v,i}^T S & -w_{v,i}^T l_v c^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_{v,i} \begin{bmatrix} w_{v,i}^T & 0^T \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (117)$$

dass der Störmodelleigenwert  $\lambda_{v,i}$  ein Eigenwert des Störbeobachters (14)–(15) ist. Dieser wäre dann nicht asymptotisch stabil, was wegen des gültigen Separationsprinzips gemäß Satz 2 im Widerspruch zur Voraussetzung einer asymptotisch stabil entworfenen Regelung steht. Deshalb muss  $w_{v,i}^T l_v \neq 0$  sein. Damit ist gezeigt, dass das Gleichungssystem (114) für  $v_2 \neq 0$  keine Lösung hat. Folglich können nur noch Lösungen mit  $v_2 = 0$  vorkommen. Dies impliziert aber  $v_1 = 0$ , da aufgrund der Beobachtbarkeit von  $(\gamma^T, S)$  und der Regularität von  $A - b k_x^T - \lambda_{v,i} I$  sich aus (112) unmittelbar  $\text{rang } A_1 = n_v + n$  ergibt. Damit ist gezeigt, dass das Gleichungssystem (114) für  $\lambda_{v,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_v$ , unter den gemachten Voraussetzungen nur die triviale Lösung besitzt und somit  $\det P(s) \neq 0$ ,  $\forall s \in \sigma(S)$ , gilt. Deshalb wird keiner der Störmodelleigenwerte  $\lambda_{v,i}$  im Übertragungsverhalten des Reglers (20)–(21) durch invariante Reglernullstellen kompensiert. Weil  $(\Pi, \gamma^T)$  Lösung der „regulator equations“ (7)–(8) ist, muss (9) gelten. Folglich können Eigenwerte des Störmodells, die im Reglerübertragungsverhalten als Pole auftreten, nicht durch invariante Nullstellen der Strecke kompensiert werden. Insgesamt sind somit alle Störmodelleigenwerte Pole des offenen Kreises, womit das interne Modellprinzip erfüllt ist.

## Literatur

1. C. Chen: Linear system theory and design. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
2. E. J. Davison und A. Goldberg: Robust control of a general servomechanism problem: the servo compensator. *Automatica* 11 (1975), S. 461–471.
3. C. A. Desoer und Y. T. Wang: On the minimum order of a robust servocompensator. *IEEE Trans. Autom. Control* 23 (1978), S. 70–73.
4. O. Föllinger: Nichtlineare Regelungen II. Oldenbourg Verlag, Wien, 1993.
5. O. Föllinger: Regelungstechnik — Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. 11. Auflage, VDE Verlag, Berlin, 2013.
6. B. A. Francis und W. M. Wonham: The internal model principle of control theory. *Automatica* 12 (1976), S. 457–465.
7. P. Hippe und Ch. Wurmthaler: Zustandsregelung. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
8. P. Hippe und Ch. Wurmthaler: Systematic closed-loop design in the presence of input saturations. *Automatica* 35 (1999), S. 689–695.
9. P. Hippe: Windup in control — Its effects and their prevention. Springer-Verlag, London, 2006.
10. P. Hippe: Eine systematische Vermeidung der durch Stellsignalbegrenzungen ausgelösten Probleme. *at-Automatisierungstechnik* 55 (2007), S. 377–393.
11. P. Hippe und J. Deutscher: Design of observer-based compensators — From the time to the frequency domain. Springer-Verlag, London, 2009.
12. H. Knobloch, A. Isidori und D. Flockerzi: Topics in control theory. Birkhäuser, Basel, 1993.
13. J. Lunze: Regelungstechnik 1. 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
14. J. O'Reilly: Further comments on 'Minimal-order observers for linear multivariable systems with unmeasurable disturbances'. *Int. J. Control* 31 (1980), S. 605–608.
15. J. O'Reilly: Observers for linear systems. Academic Press, London, 1983.
16. G. Roppenecker: Zustandsregelung linearer Systeme — Eine Neubetrachtung. *at-Automatisierungstechnik* 57 (2009), S. 491–498.
17. A. Saberi, A. Stoorvogel und O. Sannuti: Control of linear systems with regulation and input constraints. Springer-Verlag, London, 2000.
18. G. Wehrich: Mehrgrößen-Zustandsregelung unter Einwirkung von Stör- und Führungssignalen. *Regelungstechnik* 25 (1977), S. 166–172 und S. 204–209.
19. E. Zeidler (Hrsg.): Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2003.



**PD Dr.-Ing. habil. Joachim Deutscher**  
Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl  
für Regelungstechnik, Cauerstraße 7,  
D-91058 Erlangen  
[joachim.deutscher@fau.de](mailto:joachim.deutscher@fau.de)

PD Dr.-Ing. habil. Joachim Deutscher ist akademischer Oberrat und Privatdozent am Lehrstuhl für Regelungstechnik der Universität Erlangen-Nürnberg und leitet dort die Forschungsgruppe „Unendlich-dimensionale Systeme“. Hauptarbeitsgebiete: verteilt-parametrische und nichtlineare Systeme mit Anwendungen in der Mechatronik und Fertigungstechnik.



**Prof. Dr.-Ing. habil. Günter Roppenecker**  
Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl  
für Regelungstechnik, Cauerstraße 7,  
D-91058 Erlangen  
[guenter.roppenecker@fau.de](mailto:guenter.roppenecker@fau.de)

Prof. Dr.-Ing. habil. Günter Roppenecker ist Inhaber des Lehrstuhls für Regelungstechnik an der Technischen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg. Hauptarbeitsgebiete sind neben der Lehre die methodische Weiterentwicklung der Regelungstechnik mit Blick auf Zwei-Freiheitsgrade-Strukturen sowie Regelungstechnik-Anwendungen im Kraftfahrzeug.